Cours de probabilités du 18 Octobre

Romain Bardou

29 octobre 2004

1 Lemme d'ergodicité

Rappelons le lemme d'ergodicité (en reprenant les notations précédentes), puis montrons-le.

Lemme 1. *L'application suivante est contractante :*

$$\begin{array}{rcl} f : \mathscr{P} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ \vec{\theta} & \longmapsto & \vec{\theta} \cdot R \end{array}$$

Démonstration. Soit Q une matrice stochastique à coefficients strictements positifs et F l'espace des états.
Soit $(\mu, \nu) \in S^2$.
Soit $\theta = \mu - \nu$.

On a :

$$\sum_i \theta(i) = \sum_i \mu(i) - \sum_i \nu(i) = 1 - 1 = 0.$$

On notera :
$B = \{i \in F, \quad \theta(i) \geq 0\}$
$B^c = \{i \in F, \quad \theta(i) < 0\}$
$\theta(B) = \sum_{i \in B} \theta(i)$
$\theta(B^c) = \sum_{i \in B^c} \theta(i)$
$\widehat{\theta} = \theta \cdot Q$ (et, par extension, on a $\widehat{B}$ et $\widehat{B^c}$)
$\|\theta\| = \theta(B)$
$d(\mu, \nu) = \|\mu - \nu\|$ (on remarque que d est une distance)

On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \|\widehat{\theta}\| & = & \widehat{\theta}(\widehat{B}) \\ & = & \displaystyle\sum_{j \in \widehat{B}} \widehat{\theta}(j) \\ & \leq & \displaystyle\sum_{j \in \widehat{B}} \sum_{i \in B} \theta(i) q_{ij} \\ & \leq & \displaystyle\sum_{i \in B} \theta(i) \sum_{j \in \widehat{B}} q_{ij} \end{array}$$

Posons $a = \inf_{ij} q_{ij}$. On a $a > 0$. Donc :

$$\sum_{j \in \widehat{B}} q_{ij} \leq 1 - a < 1$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|\widehat{\theta}\| &\leq (1-a) \sum_{i \in B} \theta(i) \\ \|\widehat{\theta}\| &\leq (1-a)\|\theta\| \end{aligned}$$

Avec $0 < a < 1$. □

2 Application : mélange de cartes (Donoho)

2.1 Enoncé du problème

Le problème est de savoir si les croupiers mélangent correctement les cartes ou non. On peut formaliser le problème de la façon suivante :

Notons G le groupe des permutations.
Soient X_1, X_2, ... X_n des variables aléatoires dans $G1 \subset G$.
Soit $g_0 \in G$ l'ordre initial du paquet de cartes.
Pour tout n on notera $g_{n+1} = X_{n+1} g_n$.

Les X_i représenterons les différentes permutations effectuées par le croupier. Ils ont tous la même loi μ. On suppose les X_i indépendants. Ils forment donc une chaîne de Markov : $X_n(...X_3(X_2(X_1 g_0))...)$. Si elle est ergodique, elle converge donc vers une loi limite θ sur G.

1) Montrer que θ est la loi uniforme sur G (ce qui montrerait que le mélange est correct, c'est à dire qu'il ne favorise pas certaines permutations plutôt que d'autres).
2) Montrer qu'à partir de $n = 5$, on est déjà très proche de la loi uniforme (c'est à dire que mélanger 5 fois les cartes est suffisant pour bien mélanger les cartes).

2.2 Résolution

Nous ne traiterons que la question 1.

$$\begin{aligned} g_{n+1} = X_{n+1} g_n &\implies X_{n+1} = g_{n+1} g_n^{-1} \\ &\implies \mathbb{P}[g_{n+1} = j | g_n = i] = \mathbb{P}\left[X_{n+1} = j i^{-1} | g_n = i\right] \end{aligned}$$

Etant donné que les g_n ne dépendent que de $X_1 ... X_n$, et que les X_n sont indépendants, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[g_{n+1} = j | g_n = i] &= \mathbb{P}\left[X_{n+1} = j i^{-1}\right] \\ &= \mu(j i^{-1}) \\ &= q_{ij} \end{aligned}$$

De plus on peut montrer qu'il y a invariance à droite. En effet, pour tout h :

$$\begin{aligned}(jh)(ih)^{-1} &= (jh)(h^{-1}i^{-1}) \\ &= ji^{-1}\end{aligned}$$

Donc :

$$\forall h \in G, q_{i,j} = q_{ih,jh}$$

Si on note, pour tout h : $\theta_h : i \mapsto \theta(ih)$, θ_h est une loi de probabilité (en particulier, $\sum_i \theta_h(i) = \sum_i \theta(ih) = 1$). Et d'après l'invariance à droite que l'on vient de montrer, on a :

$$\theta Q = \theta \Longrightarrow \theta_h Q = \theta_h$$

On en déduit, de part l'unicité de la loi limite θ (qui provient du caractère ergodique de la chaîne de Markov) :

$$\forall i, \forall h : \theta_h(i) = \theta(ih) = \theta(i) \Longrightarrow \forall i, j : \theta(i) = \theta(j)$$

Et donc θ est bien la loi uniforme.

3 Transformée de Fourier d'une loi de probabilité

Soit une variable aléatoire X sur un univers $\Omega = \mathbb{R}$ tel que $X(\Omega)$ soit dénombrable. Soit μ la loi de X ($\mu(x) = \mathbb{P}[X = x]$).

Soit alors $Z = e^{itX}$, où $i^2 = -1$ et $t \in \mathbb{R}$. $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ est donc une variable aléatoire.

Définition 1. *La transformée de Fourier de μ est $\widehat{\mu}$ où :*

$$\begin{aligned}\widehat{\mu}(t) &= \mathbb{E}\left[e^{itX}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\cos(tX) + i\sin(tX)\right] \\ &= \sum_{x\in\mathbb{R}} \cos(tx)\mu(x) + i\sum_{x\in\mathbb{R}} \sin(tx)\mu(x)\end{aligned}$$

Proposition 1. $\forall \theta, \mu : \widehat{\theta}(t) = \widehat{\mu}(t) \iff \theta = \mu$

Cela signifie que l'on peut caractériser une loi de probabilité par sa transformée de Fourier.

Remarque 1. *Soient $X_1 ... X_n$, n variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mu_1 ... \mu_n$, et $S_n = X_1 + ... + X_n$. Soit ν la loi de probabilité de S_n. Alors :*

$$\widehat{\nu}(t) = \widehat{\mu_1}(t) \times \widehat{\mu_2}(t) \times ... \times \widehat{\mu_n}(t)$$

Cela vient de la propriété de l'espérance d'un produit de fonctions de variables aléatoires indépendantes, et du fait que $e^{a+b} = e^a e^b$.

En particulier, si $\forall j, \mu_j = \mu$ alors $\widehat{\nu}(t) = \widehat{\mu}(t)^n$.

4 Théorème limite centrale

Théorème 1. *Soit $(X_j)_j$ une suite de variables aléatoire indépendantes de même loi μ. Soit σ^2 la variance de X_1. On note $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$. $(\overline{X}_n)_n$ tend vers $m = \mathbb{E}[X_1] = \sum_x x\mu(x)$. On a :*

$$\mathbb{P}\left[a \leq \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \leq b\right] \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

En réalité, si $n \geq 12$ on est déjà très proche de la limite.